

16.1

Koska $\frac{100}{27} \approx 3,7$, niin pienin luvulla 27 jaollinen kolminumeroinen luku on $4 \cdot 27 = 108$.

Koska $\frac{999}{27} = 37$, niin suurin luvulla 27 jaollinen kolminumeroinen luku on $37 \cdot 27 = 999$.

Kolminumeroisia luvulla 27 jaollisia lukuja on $37 - 3 = 34$ kappaletta.

Seuraava luvulla 27 jaollinen luku saadaan aina lisäämällä edelliseen luku 27.

On laskettava aritmeettinen summa $108 + 135 + 162 + \dots + 999$, jossa $a_1 = 108$, $a_{34} = 999$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 34.

$$\begin{aligned} S_{34} &= 34 \cdot \frac{108 + 999}{2} \\ &= 18\,819 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{34} &= 34 \cdot \frac{a_1 + a_{34}}{2}, \text{ missä} \\ a_1 &= 108, \quad a_{34} = 999. \end{aligned}$$

Vastaus

18 819

16.2

Hyrrän hinta on 3 euroa kappaleelta, joten kauppiaan sama myyntitulo on kolmella jaollinen kokonaisluku.

Seuraavan päivän myyntitulo saadaan aina vähentämällä edellisen päivän myyntulosta 3 euroa. Päivittäiset myyntitulot muodostavat aritmeettisen jonon.

Ensimmäisenä myyntipäivänä myyntitulo oli $34 \cdot 3 = 102$ euroa.

Viimeisenä myyntipäivänä myyntitulo oli $3 \cdot 3 = 9$ euroa.

Kauppiaas myi hyriä kaikkiaan $34 - 2 = 32$ peräkkäisenä päivänä.

On laskettava aritmeettinen summa $102 + 99 + 96 + \dots + 9$, jossa on 32 yhteenlaskettavaa.

$$S_{32} = 32 \cdot \frac{102 + 9}{2} = 1776 \text{ (€)}$$

Kauppiaan myyntitulo oli kaikkiaan 1776 euroa.

Vastaus

1776 €

16.3

$$100 \% - 24 \% = 76 \% = 0,76$$

Taulukoidaan Murren elimistössä olevan lääkeaineen määrä päivittäin.

Tabletti	Vaikuttavaa ainetta jäljellä (mg)					
	0 vrk	1 vrk	2 vrk	...	9 vrk	10 vrk
1.	20	$0,76 \cdot 20$	$0,76^2 \cdot 20$...	$0,76^9 \cdot 20$	$0,76^{10} \cdot 20$
2.		20	$0,76 \cdot 20$...	$0,76^8 \cdot 20$	$0,76^9 \cdot 20$
3.			20	...	$0,76^7 \cdot 20$	$0,76^8 \cdot 20$
⋮					⋮	⋮
9.					$0,76 \cdot 20$	$0,76^9 \cdot 20$
10.					20	$0,76 \cdot 20$

On laskettava geometrinen summa

$$0,76 \cdot 20 + 0,76^2 \cdot 20 + \dots + 0,76^{10} \cdot 20,$$

jossa $a_1 = 0,76 \cdot 20$, $q = 0,76$ ja $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{0,76 \cdot 20 \cdot (1 - 0,76^{10})}{1 - 0,76} \approx 59 \text{ (mg)}$$

Murren elimistössä on 59 mg lääkeainetta.

Vastaus

59 mg

16.4

$$100 \% + 3 \% = 103 \% = 1,03$$

Talletuksen arvo tulee kalenterivuoden aikana 1,03-kertaiseksi.

Taulukoidaan tilille tehtyjen talletusten arvot vuosittain. Talletuksia tehdään 16 kappaletta.

Talletus	Talletuksen arvo (€)					
	0 v	1 v	2 v	...	14 v	15 v
1.	300	$1,03 \cdot 300$	$1,03^2 \cdot 300$...	$1,03^{14} \cdot 300$	$1,03^{15} \cdot 300$
2.		300	$1,03 \cdot 300$...	$1,03^{13} \cdot 300$	$1,03^{14} \cdot 300$
3.			300	...	$1,03^{12} \cdot 300$	$1,03^{13} \cdot 300$
⋮					⋮	⋮
15.					300	$1,03 \cdot 300$
16.						300

On laskettava geometrinen summa

$$300 + 1,03 \cdot 300 + 1,03^2 \cdot 300 + 1,03^3 \cdot 300 + \dots + 1,03^{15} \cdot 300,$$

jossa $a_1 = 300$, $q = 1,03$ ja $n = 16$.

$$S_{16} = \frac{300 \cdot (1 - 1,03^{16})}{1 - 1,03} \approx 6047,06 \text{ (€)}$$

Tilillä on noin 6050 euroa.

Vastaus

6050 €

Huomaa!

Pankkitilille maksetaan korko vuosittain ja aina koronmaksun yhteydessä summa pyöristyy sentin tarkkuuteen. Geometrinen summa ei huomioi tätä pyöristystä, joten saatu tulos 6047,06 € ei ole todellinen lopputulos. Siksi vastaus on annettu 10 euron tarkkuudella.

16.5

$$100 \% + 9,2 \% = 109,2 \% = 1,092$$

Lasketaan käytettyjen lääkeannosten määrä.

$$\underbrace{2452 + 1,092 \cdot 2452 + 1,092^2 \cdot 2452 + 1,092^3 \cdot 2452 + \dots + 1,092^9 \cdot 2452}_{\substack{\text{geometrisen summa, } S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ jossa} \\ a_1 = 2452, \quad q = 1,092 \text{ ja } n = 10}} \\ = \frac{2452 \cdot (1 - 1,092^{10})}{1 - 1,092} \\ \approx 37\,611$$

Lasketaan tuhoutuneiden lääkeannosten määrä.

$$\underbrace{139 + (139 + 26) + (139 + 2 \cdot 26) + \dots + (139 + 9 \cdot 26)}_{\substack{\text{aritmeettinen summa } S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \\ \text{jossa } a_1 = 139 \text{ ja } n = 10}} \\ = 10 \cdot \frac{139 + (139 + 9 \cdot 26)}{2} \\ = 10 \cdot \frac{139 + 373}{2} \\ = 2560$$

Lääkeannoksia annettiin potilaille kaikkiaan

$$37\,611 - 2560 = 35\,051 \approx 35\,000$$

kappaletta.

Vastaus

35 000

16.6

Merkitään nykyistä vuotuista louhintamäärää kirjaimella a .
Arvioitua malmivarat ovat $100a$.

$$100 \% + 2 \% = 102 \% = 1,02$$

Jos louhintamäärää lisätään 2% joka vuosi, seuraavan vuoden louhintamäärä saadaan aina kertomalla edellisen vuoden louhintamäärä luvulla $1,02$. Vuotuiset louhintamäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = a$ ja $q = 1,02$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika n , jonka malmivarat riittävät.

$$S_n = 100a$$

$$\frac{a \cdot (1 - 1,02^n)}{1 - 1,02} = 100a \quad | : a \ (\neq 0)$$

$$\frac{1 - 1,02^n}{1 - 1,02} = 100$$

$$n \approx 55$$

Malmivarat riittävät noin 55 vuotta.

Vastaus

55 vuotta

16.7

- a) Lukujonon seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,013 JA lisäämällä luku 12. Lukujono ei ole geometrinen eikä aritmeettinen.
- b) Lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 50. Lukujono on aritmeettinen.
- c) Lukujonon seuraava jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla 1,024. Lukujono on geometrinen.

Vastaus

- a) ei kumpaakaan
- b) aritmeettinen
- c) geometrinen

16.8

Seuraavan rivin istuinten lukumäärä saadaan lisäämällä edellisen rivin istuinten lukumäärään luku 3. Rivien istuinten lukumäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 16$ ja $d = 3$.

Istuimia on yhteensä 252, joten jossain on oltava istuin numero 123.

Lasketaan aritmeettisen summan S_n arvoja eri n :n arvoilla ja päätellään, millä rivillä on istuin numero 123.

$$S_4 = 4 \cdot \frac{16 + (16 + (4 - 1) \cdot 3)}{2} = 82 (< 123)$$

$$S_5 = 5 \cdot \frac{16 + (16 + (5 - 1) \cdot 3)}{2} = 110 (< 123)$$

$$S_6 = 6 \cdot \frac{16 + (16 + (6 - 1) \cdot 3)}{2} = 141 (> 123)$$

Istuin numero 123 on rivillä 6.

Vastaus

rivillä 6

16.9

Koska $\frac{1000}{78} \approx 12,8$, niin pienin luvulla 78 jaollinen kolminumeroinen luku on $13 \cdot 78 = 1014$.

Koska $\frac{9999}{78} \approx 128,2$, niin suurin luvulla 78 jaollinen kolminumeroinen luku on $128 \cdot 78 = 9984$.

Kolminumeroisia luvulla 78 jaollisia lukuja on $128 - 312 = 116$ kappaletta.

Seuraava luvulla 78 jaollinen luku saadaan aina lisäämällä edelliseen luku 78.

On laskettava aritmeettinen summa $1014 + 1092 + 1170 + \dots + 9984$, jossa $a_1 = 1014$, $a_{116} = 9984$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä on 116.

$$\begin{aligned} S_{116} &= 116 \cdot \frac{1014 + 9984}{2} \\ &= 637\,884 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{116} &= 116 \cdot \frac{a_1 + a_{116}}{2}, \text{ missä} \\ a_1 &= 1014, \quad a_{116} = 9984. \end{aligned}$$

Vastaus

637 884

16.10

Seuraavan rivin paikkojen lukumäärä saadaan lisäämällä edellisen rivin istuinten lukumäärään luku 1. Rivien istuinten lukumäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 15$ ja $d = 1$. Jonossa on $n = 28$ jäsentä.

a) Lasketaan jonon jäsenten summa.

$$S_{28} = 28 \cdot \frac{15 + (15 + (28 - 1) \cdot 1)}{2} = 798$$

Paikkoja on yhteensä 798.

b) Lasketaan aritmeettisen summan S_n arvoja eri n :n arvoilla ja päätellään, millä rivillä on paikka 398.

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{15 + (15 + (16 - 1) \cdot 1)}{2} = 360 (< 398)$$

$$S_{17} = 17 \cdot \frac{15 + (15 + (17 - 1) \cdot 1)}{2} = 391 (< 398)$$

$$S_{18} = 18 \cdot \frac{15 + (15 + (18 - 1) \cdot 1)}{2} = 423 (> 398)$$

Paikka 398 on rivillä 18.

Vastaus

a) 798

b) rivillä 18

16.11

$$100 \% + 5,0 \% = 105,0 \% = 1,05$$

Sijoituksen arvo tulee kalenterivuoden aikana 1,05-kertaiseksi.

Taulukoidaan tehtyjen sijoitusten arvot vuosittain.

600 euron sijoituksia tehdään 20 kappaletta.

Sijoitu s	Sijoituksen arvo (€)					
	0 v	1 v	2 v	...	19 v	20 v
1.	600	$1,05 \cdot 600$	$1,05^2 \cdot 600$...	$1,05^{19} \cdot 600$	$1,05^{20} \cdot 600$
2.		600	$1,05 \cdot 600$...	$1,05^{18} \cdot 600$	$1,05^{19} \cdot 600$
3.			600	...	$1,05^{17} \cdot 600$	$1,05^{18} \cdot 600$
⋮					⋮	⋮
19.					$1,05 \cdot 600$	$1,05^2 \cdot 600$
20.					600	$1,05 \cdot 600$

On laskettava geometrinen summa

$$1,05 \cdot 600 + 1,05^2 \cdot 600 + 1,05^3 \cdot 600 + \dots + 1,05^{20} \cdot 600 ,$$

jossa $a_1 = 1,05 \cdot 600$, $q = 1,05$ ja $n = 20$.

$$S_{20} = \frac{1,05 \cdot 600 \cdot (1 - 1,05^{20})}{1 - 1,05} \approx 20\,831,55 \text{ (€)}$$

Sijoituksen oletettu arvo on 20 831,55 €.

Vastaus

20 831,55 €

16.12

$$100 \% + 7,0 \% = 107,0 \% = 1,07$$

Sijoituksen arvo tulee kalenterivuoden aikana 1,07-kertaiseksi.

Merkitään vuotuista sijoitussummaa kirjaimella x (€).

Taulukoidaan tehtyjen sijoitusten arvot vuosittain.

x euron sijoituksia tehdään $40 - 9 = 31$ kappaletta (aloitus 10. syntymäpäivänä, viimeinen sijoitus 40. syntymäpäivänä)

Sijoitus	Sijoituksen arvo (€)					
	10 v	11 v	12 v	...	39 v	40 v
1.	x	$1,07 \cdot x$	$1,07^2 \cdot x$...	$1,07^{29} \cdot x$	$1,07^{30} \cdot x$
2.		x	$1,07 \cdot x$...	$1,07^{28} \cdot x$	$1,07^{29} \cdot x$
3.			x	...	$1,07^{27} \cdot x$	$1,07^{28} \cdot x$
⋮					⋮	⋮
30.					x	$1,07 \cdot x$
31.						x

Tehtyjen sijoitusten arvo saadaan laskemalla geometrinen summa

$$x + 1,07 \cdot x + 1,07^2 \cdot x + 1,07^3 \cdot x + \dots + 1,07^{30} \cdot x,$$

jossa $a_1 = x$, $q = 1,07$ ja $n = 31$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$S_{31} = 200\,000$$

$$\frac{x \cdot (1 - 1,07^{31})}{1 - 1,07} = 200\,000$$

$$x \approx 1959,38 \text{ (€)}$$

Toukon on sijoitettava vuosittain 1959,38 €.

Vastaus

1959,38 €

16.13

$$100 \% + 12 \% = 112 \% = 1,12$$

Muistitikkuja valmistettiin 2020 – 2013 = 17 vuoden ajan.

Lasketaan valmistettujen muistitikkujen määrä.

$$\underbrace{13\,630 + 1,12 \cdot 13\,630 + 1,12^2 \cdot 13\,630 + 1,12^3 \cdot 13\,630 + \dots + 1,12^{16} \cdot 13\,630}_{\text{geometrisen summa, } S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \text{ jossa } a_1 = 13\,630, q = 1,12 \text{ ja } n = 17}$$
$$= \frac{13\,630 \cdot (1 - 1,12^{17})}{1 - 1,12}$$
$$\approx 666\,284$$

Lasketaan viallisten muistitikkujen määrä. Ensimmäisenä vuonna viallisia oli $13\,630 - 12\,920 = 710$ kappaletta.

$$\underbrace{710 + (710 + 40) + (710 + 2 \cdot 40) + \dots + (710 + 16 \cdot 40)}_{\text{aritmeettinen summa } S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \text{ jossa } a_1 = 710 \text{ ja } n = 17}$$
$$= 17 \cdot \frac{710 + (710 + 16 \cdot 40)}{2}$$
$$= 17 \cdot \frac{710 + 1350}{2} = 17\,510$$

Muistitikkuja toimitettiin kaikkiaan

$$666\,284 - 17\,510 = 648\,774 \approx 648\,770$$

kappaletta.

Vastaus

648 770

16.14

Merkitään nykyistä vuotuista öljynkulutusta kirjaimella a .

Arviodut öljyvarat ovat $40a$.

$$100 \% - 1,5 \% = 98,5 \% = 0,985$$

Jos öljynkulutusta vähennetään $1,5 \%$ joka vuosi, seuraavan vuoden öljynkulutus saadaan aina kertomalla edellisen vuoden kulutus luvulla $0,985$. Vuotuiset öljynkulutukset muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = a$ ja $q = 0,985$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika n , jonka öljyvarat riittävät.

$$S_n = 40a$$

$$\frac{a \cdot (1 - 0,985^n)}{1 - 0,985} = 40a \quad | : a \ (\neq 0)$$

$$\frac{1 - 0,985^n}{1 - 0,985} = 40$$

$$n \approx 60$$

Öljyvarat riittävät noin 60 vuotta.

Vastaus

60 vuotta

16.15

Merkitään ensimmäisellä viikolla talletettua summaa kirjaimella x .

Seuraavan viikon talletus saadaan lisäämällä edellisen viikon talletukseen luku 5 (€). Viikottaiset talletussummat muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = x$, $d = 5$. Jonossa on 52 jäsentä, jonon viimeinen jäsen on $a_{52} = x + (52 - 1) \cdot 5 = x + 255$.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_{52} = 10\,000$$

$$52 \cdot \frac{x + (x + 255)}{2} = 10\,000$$

$$x \approx 64,81$$

Ensimmäisen talletuksen pitää olla 64,81 €.

Vastaus

64,81 €

16.16

Seuraavalla portaalla olevien lamppujen lukumäärä saadaan aina lisäämällä edellisellä portaalla olevien lamppujen lukumäärään luku 1. Portaille olevien lamppujen lukumäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 1$ ja $d = 1$. Lukujonon jäsenten summa on 1081.

Jos portaita on n kappaletta, niin portailla olevien lamppujen määrä saadaan laskemalla aritmeettinen summa

$$S_n = n \cdot \frac{1 + (1 + (n-1) \cdot 1)}{2} = n \cdot \frac{1 + 1 + (n-1)}{2} = n \cdot \frac{1 + n}{2}.$$

Lasketaan tämä summa eri n :n arvoilla ja päätellään portaiden lukumäärä.

$$S_{44} = 44 \cdot \frac{1 + 44}{2} = 990$$

$$S_{45} = 45 \cdot \frac{1 + 45}{2} = 1035$$

$$S_{46} = 46 \cdot \frac{1 + 46}{2} = 1081$$

Portaita on 46 kappaletta.

Vastaus

46

16.17

a) $100 \% + 10 \% = 110 \% = 1,1$

Merkitään ensimmäisen vuoden avustuksen suuruutta kirjaimella x . Seuraavan vuoden avustus saadaan kertomalla edellisen vuoden avustus luvulla $1,1$. Vuosittaiset avustukset muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = x$ ja $q = 1,1$. Jonossa on 7 jäsentä.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} S_7 &= 800\,000 \\ \frac{x \cdot (1 - 1,1^7)}{1 - 1,1} &= 800\,000 \\ x &\approx 84\,324,40 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Ensimmäisenä vuonna on jaettava $84\,324,40$ €.

- b) Oletetaan, että jaettava avustus kasvaa vuosittain q -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan q .

$$\begin{aligned} S_7 &= 800\,000 \\ \frac{70\,000 \cdot (1 - q^7)}{1 - q} &= 800\,000 \\ q &\approx -1,62 \text{ tai } q \approx 1,16 \end{aligned}$$

Kertoimen q on oltava positiivinen, joten $q \approx 1,16 = 116 \%$. Vuotuisen kasvuprosentin on oltava $116 \% - 100 \% = 16 \%$.

Vastaus

- a) $84\,324,40$ €
b) 16%